

Fonctions : étude (Dérivation, variations...) partie 1

I. Dérivation les formules :

Fonction définie sur R.	Dérivée	Exemples :
k une constante	0	$f(x) = x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 11$
x	1	$f'(x) = 5x^4 + 24x^3 - 6x^2 + 2x + 7$
x ²	2x	
x ³	3x ²	
x ⁴	4x ³	
x ⁿ	nx ⁿ⁻¹	$f(x) = 8x^5 - x^4 - x^3 + 5x^2 - 13x + 1 + \frac{5}{x}$
$\frac{1}{x}$ (non définie en 0).	$-\frac{1}{x^2}$ (non définie en 0).	$f'(x) = 40x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 5x - 13 - \frac{5}{x^2}$

Ces calculs (simples) sont à maîtriser totalement. Ce qui sera difficile c'est d'appliquer les deux formules qui suivent :

$$(U \times V)' = U'V + UV' \quad \text{et} \quad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}.$$

Qu'il faudrait écrire : $(U(x) \times V(x))' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$ et $\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{(V(x))^2}$

Exemples :

Soit $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$ alors $f'(x) = 2x \times (x - 3) + (x^2 + 1) \times 1 = 2x^2 - 6x + x^2 + 1 = 3x^2 - 6x + 1$ en appliquant la formule 1.

Soit $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$ alors $f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - (2x - 3)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}$ en appliquant la formule 2.

La dérivée sert à indiquer les variations de la fonction. Si, sur un intervalle, la dérivée est positive, la fonction est croissante, si la dérivée est négative, la fonction est décroissante, si elle est nulle, la fonction est constante.

II. Les deux types de problèmes (au minimum de ce qu'il faut connaître !):

1. Les fonctions polynômes :

Un objet est vendu 900 €. La recette journalière pour x objet vendus est $g(x) = 900x$. Le coût de fabrication pour x objets est $f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$ €.

1. a) Calculer $f'(x)$.
- b) Montrer que $f'(x)$ s'écrit $f'(x) = 3(x - 30)^2$.
- c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [0 ; 80].
2. Faire un tableau de valeurs (x ; f(x)) par pas de 10.
3. a) Tracer f et g dans un repère (unités : 2 cm pour 10 objets et 2 cm pour 10 000 €).
- b) En déduire entre quelles valeurs de x l'entreprise fait un bénéfice.

Eléments de réponse :

1. a) Calculer $f'(x)$:

Fonction polynôme simple, appliquer directement les règles de dérivation.

$$f'(x) = 3x^2 - 90 \times 2x + 2700 = 3x^2 - 180x + 2700.$$

b) Montrer que $f'(x)$ s'écrit $f'(x) = 3(x - 30)^2$.

Partir de la deuxième expression (c'est habituel) pour trouver la première.

$$3(x - 30)^2 = 3(x^2 - 2 \times 30x + 30^2) = 3x^2 - 180x + 2700 = f'(x) \text{ CQFD.}$$

c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [0 ; 80].

Il faut utiliser l'expression donnée par l'énoncé (et calculée à la question précédente).

$3(x - 30)^2$ est un carré toujours positif ou nul (pour $x = 30$). La dérivée est positive, donc la fonction est croissante.

x	0	30	80
f	0	+	+
f	0		152000

C'est le résumé de l'étude précédente.

D'habitude on trouve une partie croissante et une décroissante. Pas cette fois.

2. Faire un tableau de valeurs (x ; f(x)) par pas de 10.

Il faut utiliser la calculatrice. Les opérations à effectuer sont décrites ci-dessous.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X^3-90X^2+27
00X
\Y2=900X
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=

```

Commencer par entrer la fonction dans l'écran [Y=].

Utiliser [^] pour les puissances.

Régler les paramètres du tableau avec [TBLSET]

touches [2nd][WINDOW].

```

TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=10
IndPnt: AUTO Ask
Depend: AUTO Ask

```

D'après l'énoncé partir de 0 (TblStart=0) et avancer par pas de 10 (ΔTbl).

On obtient alors les valeurs demandées par [TABLE] touches [2nd][GRAPH].

X	Y1	Y2
0	0	0
10	19000	9000
20	26000	18000
30	27000	27000
40	28000	36000
50	35000	45000
60	54000	54000

X=0

X	Y1	Y2
20	26000	18000
30	27000	27000
40	28000	36000
50	35000	45000
60	54000	54000
70	81000	63000
80	152000	72000

X=80

Il suffit (!) de recopier les valeurs Y1.

Rem : j'ai directement entré LES 2 fonctions du problème.

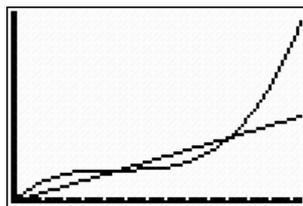
3. a) Tracer f et g dans un repère (unités : 2 cm pour 10 objets et 2 cm pour 10 000 €).

Ici aussi la calculatrice est une aide précieuse...

```

WINDOW
Xmin=0
Xmax=80
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=160000
Yscl=1
Xres=1

```



Régler les paramètres de la fenêtre graphique :

Touche [WINDOW].

Régler comme indiqué, ce qui correspond aux données de l'énoncé (x_{\min} et x_{\max}) et aux valeurs trouvées dans le tableau (minimum 0 d'où $y_{\min}=0$ et Maximum 152 000 d'où $y_{\max}=160\ 000$ car on prend toujours un petit peu plus).

b) En déduire entre quelles valeurs de x l'entreprise fait un bénéfice.

La courbe représente le coût de fabrication, la droite le prix de vente. Si l'objet est vendu moins cher que ce qu'il coûte il y a perte pas bénéfice. Il faut donc que la droite soit au-dessus de la courbe. C'est la partie centrale.

La calculatrice peut ici aussi nous aider...

```

[2nd][CALC]
1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:f(x)dx

```

```

Y1=X^3-90X^2+2700X
First curve?
X=22.12766 Y=26512.122

```

Menu [CALC] Touches [2nd][TRACE] choix [5].

La calculatrice propose la première courbe (Y1) et d'où il faut partir. On ne voit pas très bien, il faut se placer (flèches [←][→]) un peu avant le point d'intersection.

Touche [ENTER].

```

Y2=900X
Second curve?
X=22.12766 Y=19914.894

```

```

Y2=900X
Guess?
X=22.12766 Y=19914.894

```

La calculatrice propose la seconde courbe. Touche [ENTER]. Ne pas s'occuper de cette étape... Touche [ENTER].

Le résultat s'affiche : $x=30$ ($Y=27\ 000$).

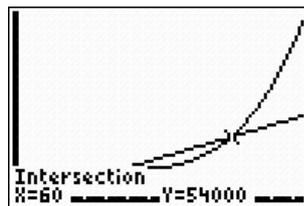
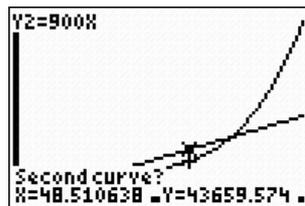
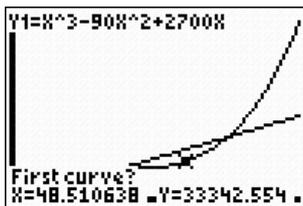
Nous avons le premier point d'intersection. C'est à partir de cette valeur que l'on fera du bénéfice.

Passer à la deuxième valeur. Menu [CALC] Touches [2nd][TRACE] choix [5]. Se placer un peu avant cette deuxième valeur (flèche [→]).

```

Intersection
X=30 Y=27000

```



Le résultat $x=60$.

Rem : je n'ai pas mis l'image de l'étape qui ne nous intéresse pas.

Réponse : l'entreprise fait un bénéfice pour une vente d'objets comprise entre 30 et 60.

2. Les fonctions rationnelles (dénominateur) :

Une imprimante coûte 260 TTC. Elle est munie d'une cartouche d'encre permettant d'imprimer 1 200 pages. Chaque nouvelle cartouche est achetée 46 €. Un paquet de 500 feuilles coûte 8,50 €.

1. Calculer le coût d'impression de 10 000 pages en considérant que l'imprimante atteint alors sa limite de fonctionnement.
2. Calculer le coût unitaire par page pour 10 000 pages imprimées.
3. On imprime une quantité x de pages avec $x \leq 20\,000$ (en considérant que l'imprimante atteint alors sa limite de fonctionnement pour ces 20 000 pages). Calculer le prix total de ces impressions, puis le prix unitaire par pages en fonction de x .

Etudier la fonction obtenue sur l'intervalle $[1 ; 20\,000]$ (on calculera tout de même les limites en 0 et en l'infini...).

Variations et représentation graphique.

Combien faut-il imprimer de pages au minimum pour obtenir un coût unitaire inférieur à 0,07 € ?

Remarque : il faudrait normalement tenir compte du nombre (entier) de paquets de pages à acheter et non du nombre de feuilles, de même pour le nombre de cartouches achetées... en effet, pour 502 pages il faut acheter obligatoirement 2

paquets de feuilles (donc $8,5 \times 2 = 17$ €) alors que notre calcul donnera un prix d'achat de $\frac{502}{500} \times 8,5 = 8,534$ €.

L'utilisation d'un programme ou d'un tableur permettrait de résoudre facilement ce problème. On pourrait aussi utiliser la fonction partie entière (int sur les calculatrices) qui n'est pratiquement plus utilisée en classe.

Eléments de réponse :

1. **Calculer le coût d'impression de 10 000 pages en considérant que l'imprimante atteint alors sa limite de fonctionnement.**

Le coût est représenté par : l'imprimante 260 €, le papier $10\,000/500=20$ paquets à 8,50 l'un soit 170 € et les cartouches

 une cartouche se trouve déjà dans l'imprimante ! $10\,000/1\,200=8,33...$ il faut un total de 9 cartouches, donc 8 achetées. $8 \times 46 = 368$.

Dépense : $260 + 170 + 368 = 798$. Coût d'impression de 10 000 pages : 798 €.

2. **Calculer le coût unitaire par page pour 10 000 pages imprimées.**

Pour 10 000 pages on dépense 798 €. Pour une page $798/10\,000=0,0798$ soit (arrondi) 0,08€.

3. **On imprime une quantité x de pages avec $x \leq 20\,000$. Calculer le prix total de ces impressions, puis le prix unitaire par pages en fonction de x .**

C'est la généralisation du problème. On remplace 10 000 par x le nombre de pages inconnu. Petite remarque... il n'est pas possible de connaître le véritable nombre de cartouches, il faudrait utiliser la fonction « partie entière » qui n'est pas à votre programme.

Donc : 260 € pour l'imprimante, $\frac{x}{500} \times 8,5$ pour le papier et $\frac{x}{1\,200} \times 46 = \frac{23x}{600}$ pour les cartouches. Soit au total :

$260 + \frac{8,5x}{500} + \frac{23x}{600} = \frac{780\,000 + 51x + 115x}{3\,000} = \frac{166x + 780\,000}{3\,000} = \frac{83x + 390\,000}{1\,500}$ avec mise au même dénominateur et simplifications.

Coût de revient de x pages : $\frac{83x + 390\,000}{1\,500}$.

Rem : pour 10 000 pages on trouve 813,33. Il faut 8,33... cartouches ce qui en faisait 9 car ils ne vendent pas un morceau de cartouche. Comme une était déjà fournie cela en faisait 8 à acheter. Alors $0,33... \times 46 = 15,33...$ et $813,33 - 15,33 = 798$ ce qui avait été trouvé. Donc ce devrait être ça.

Coût de revient unitaire : $f(x) = \frac{83x + 390\,000}{1\,500x}$. (C'est une fonction rationnelle qui n'est pas définie pour $x=0$).

Etudier la fonction obtenue sur l'intervalle [1 ; 20 000] (on calculera tout de même les limites en 0 et en l'infini... pour ceux qui l'ont au programme). Variations et représentation graphique.

Etudier veut dire limites (ceux qui l'ont au programme), dérivée, signe de la dérivée d'où tableau de variations.

Limites :

❖ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} N \rightarrow 390\,000 \\ D \rightarrow 0^+ \end{cases}$ Asymptote verticale $x=0$. (limite en un point particulier, on détaille)

❖ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(83 + \frac{390\,000}{x} \right)}{x(1\,500)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{83}{1\,500} = 0,055$ (limite en $+\infty$ donc mise en facteur des termes de plus haut degré).

Rem : cette limite veut dire qu'il ne sera pas possible de faire baisser le prix en dessous de 0,055 €/page.

Dérivée :

De la forme $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ avec $\begin{cases} U(x) = 83x + 390\,000 & U'(x) = 83 \\ V(x) = 1\,500x & V'(x) = 1\,500 \end{cases}$

$f'(x) = \frac{83 \times 1\,500x - (83x + 390\,000) \times 1\,500}{(1\,500x)^2} = -\frac{260}{x^2}$. Elle est donc toujours négative, la fonction est strictement

décroissante.

Variations :

x	1	20000
f'	-	-
f	260	0,068

x	0	∞
f'	-	-
f	∞	83/1500

Regrouper les résultats obtenus précédemment.

Premier tableau pour ceux qui n'ont pas les

limites à chercher(*). L'autre...

(* Il faut calculer les valeurs de la fonction pour $x=1$ et $x=20\,000$. C'est un peu plus loin.

Pour tracer la courbe, il faut une idée des variations : elle descend tout le temps, MAIS entre quelles valeurs ?

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(83X+390000)
/(1500X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
    
```

```

TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=2000
Indent: Auto Ask
Depend: Auto Ask
    
```

X	Y1
0	ERR:
2000	.18533
4000	.12033
6000	.09867
8000	.08783
10000	.08133
12000	.077

X	Y1
8000	.08783
10000	.08133
12000	.077
14000	.0739
16000	.07158
18000	.06978
20000	.06833

Comme pour l'exo précédent, entrer la fonction, afficher un tableau de valeurs (une bonne dizaine, j'ai donc choisi un pas de 2 000).

```

WINDOW
Xmin=0
Xmax=20000
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=.3
Yscl=1
Xres=1

VARS Y-VARS
Window...
2:Zoom...
3:GDB...
4:Picture...
5:Statistics...
6:Table...
7:String...
    
```

```

VARS V-VARS
Function...
2:Parametric...
3:Polar...
4:On/Off...
    
```

On peut définir les paramètres de la fenêtre d'affichage et afficher la courbe.

Ci-dessous, comment obtenir la valeur de $f(1)$?

Menu [VARS] puis flèche [▸] puis [ENTER] et compléter puis [ENTER].

```

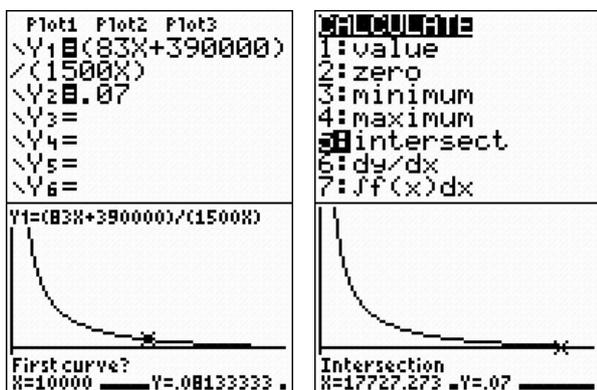
FUNCTION
Y1(1)
Y2
Y3
Y4
Y5
Y6
Y7
    
```

Y1(1)	260.0553333
-------	-------------

Combien faut-il imprimer de pages au minimum pour obtenir un coût unitaire inférieur à 0,07 € ?

On cherche $f(x) \leq 0,07$ soit $\frac{83x+390\,000}{1\,500x} \leq 0,07$ qui s'écrit $83x+390\,000 \leq 105x$ faire passer ce qu'il faut pour obtenir : $390\,000 \leq 22x$ ou $17\,727,27 \leq x$ soit finalement $17\,728 \leq x$.

La calculatrice peut vérifier cette valeur :



Ajouter dans $\boxed{Y=}$ la valeur cherchée. Puis afficher la courbe.

Menu [CALC] touches $\boxed{2nd}$ [TRACE] puis 5.

Vous connaissez (ou revoir première étude).

\boxed{ENTER} 3 fois et la valeur d'intersection s'affiche.

C'est celle calculée. Nous avons fait juste.

III. Exo(s) de synthèse, fonction rationnelle (c'est ce que l'on donne en fin de première, en début de terminale tant que l'on n'a pas les logarithmes ou les expos à étudier) :

1. Exo corrigé avec une calculatrice TI-Nspire (posé en STL) :

I. Soit la fonction f définie par $x \rightarrow \frac{x^2-3x+6}{x-5}$

1. Domaine de définition (non demandé au bac).
2. Limites et asymptotes éventuelles.
3. Montrer que la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .
4. Montrer que la dérivée f' de f sur I peut s'écrire $f'(x) = \frac{x^2-10x+9}{(x-5)^2}$
5. Etude du signe de f' , tableau de variations.
6. Equation de la tangente à C_f courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0=6$ (on pourra trouver $y = -15x + 114$).
7. Faire un tableau de valeurs (quelques unes), puis tracer C_f la courbe représentative de f dans un bon repère ainsi que la tangente (et les asymptotes).

CORRECTION avec utilisation de la TI-Nspire CAS.

I. Soit la fonction f définie par $x \rightarrow \frac{x^2-3x+6}{x-5}$

8. Domaine de définition (non demandé au bac).

Récitation : c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne doit pas être nul. $x-5=0$ d'où $x=5$.
 $Df = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.

9. Limites et asymptotes éventuelles.

D'après le domaine de définition nous avons 4 limites à chercher (au bac ils ne donnent que l'un des intervalles, il n'y aurait que deux limites).

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x+6}{x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2})}{x(1-\frac{5}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$. Vous n'oubliez pas de factoriser, puis de

dire que tout ce qui a du x en dénominateur tend vers zéro (on enlève, on barre) et on simplifie ce qui reste (le carré avec le x en déno).

✓ $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = -\infty$ car $\begin{matrix} N \rightarrow 16 \\ D \rightarrow 0^- \end{matrix}$ (ne pas oublier de justifier le signe du dénominateur) $\frac{-5}{0^+}$.

On indique : asymptote verticale $x = 5$

✓ $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$ car $\begin{matrix} N \rightarrow 16 \\ D \rightarrow 0^+ \end{matrix}$ (le signe du déno est justifié dans la réponse précédente).

On indique : asymptote verticale $x = 5$

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

10. Montrer que la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .

La droite $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f ssi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = 0$.

Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 5} - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 6 - (x - 5)(x + 2)}{x(1 - 5/x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 6 - x^2 + 3x + 10}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{16}{x} = 0.$$

CQFD, dont la droite $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f (ne pas oublier la conclusion !).

11. Montrer que la dérivée f' de f sur I peut s'écrire $f'(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{(x - 5)^2}$.

Vous avez un programme sur calculatrice qui vous donne les étapes à recopier... je fais comme s'il n'existait pas, alors que je l'ai sous les yeux !

f' est de la forme $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ avec $U(x) = x^2 - 3x + 6$ donc $U'(x) = 2x - 3$ et $V(x) = x - 5$ donc

$$V'(x) = 1.$$

$$\text{ALORS, } f'(x) = \frac{(2x - 3)(x - 5) - (x^2 - 3x + 6)(1)}{(x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 13x + 15 - x^2 + 3x - 6}{(x - 5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 9}{(x - 5)^2}.$$

Sur la calculatrice :

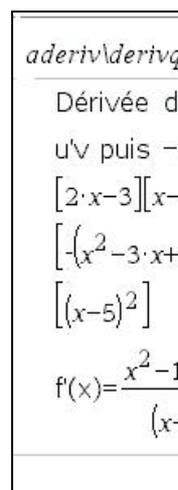
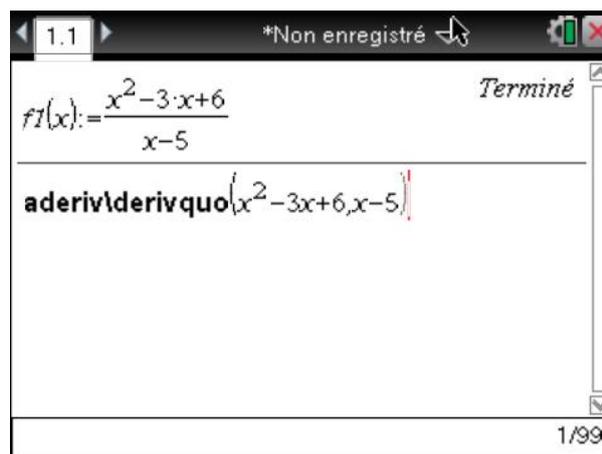
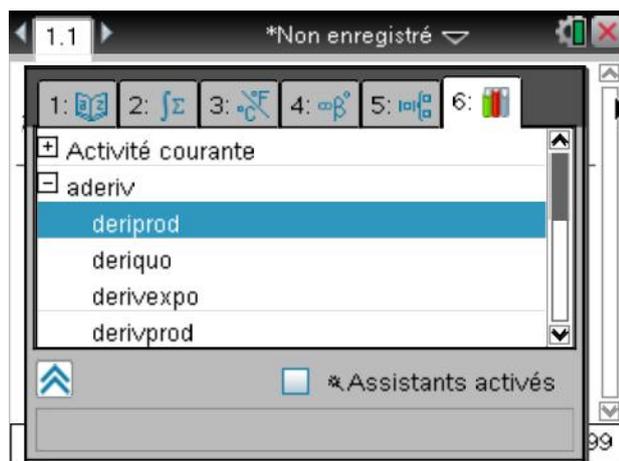
Je suppose que vous l'avez allumée... puis entré la fonction comme déjà indiqué [$f(x)$...].

Puis, ouvrir le catalogue (touche du côté des symboles d'opération +, - etc.).

Appuyer sur la touche '6' qui permet de trouver les programmes stockés dans le répertoire « MyLib » qui sont partagés avec tous les classeurs.

Développer « aderiv ». Choisir derivquo, appuyer sur « entrée ». Dans la parenthèse entrer le numérateur, puis une virgule, puis le dénominateur et fermer la parenthèse.

C'est chouette, car ça dit tout !



12. Etude du signe de f' , tableau de variations.

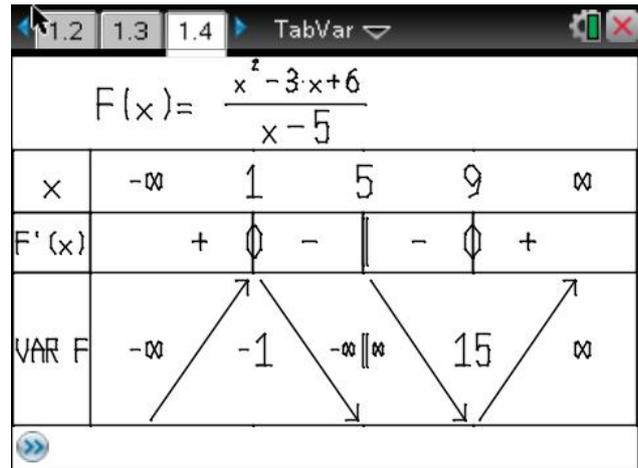
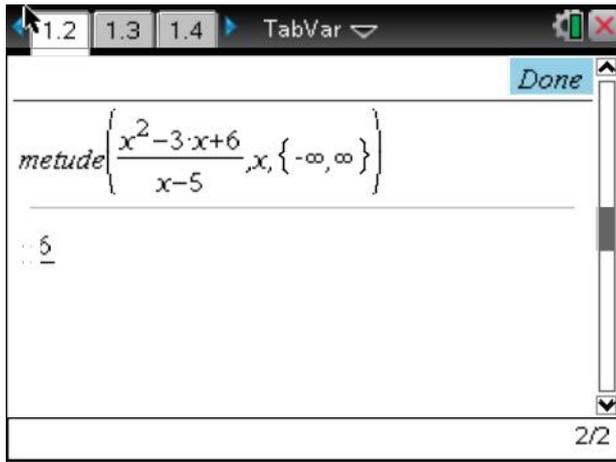
Vous devez étudier le signe de la dérivée, puis faire le tableau...

Pour la dérivée, c'est un polynôme du second degré, il faut calculer le discriminant (delta), qui est positif puis les racines (1 et 9).

Pour voir un joli tableau de variations sur votre calculatrice, ouvrir l'application « TabVar » (cherchez, ça y est). En page 1.2 taper :

metude($(x^2 - 3x + 6)/(x - 5), x, \{-\infty, \infty\}$). Vous obtenez des résultats dans la page. Aller en 1.4 pour y admirer LE tableau tout fait.

Rappel : pas d'explications, pas de calculs et justifications c'est aussi pas de points...



Tout cela vous est offert par votre gentille calculatrice...

13. Equation de la tangente à C_f courbe représentative de f au point d'abscisse $x_0=6$ (on pourra trouver $y = -15x + 114$).

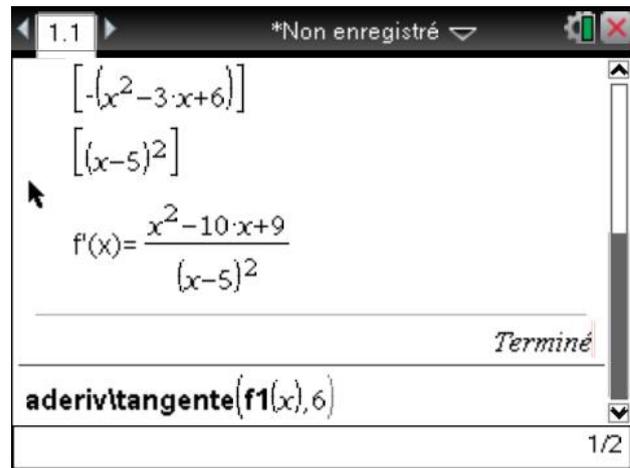
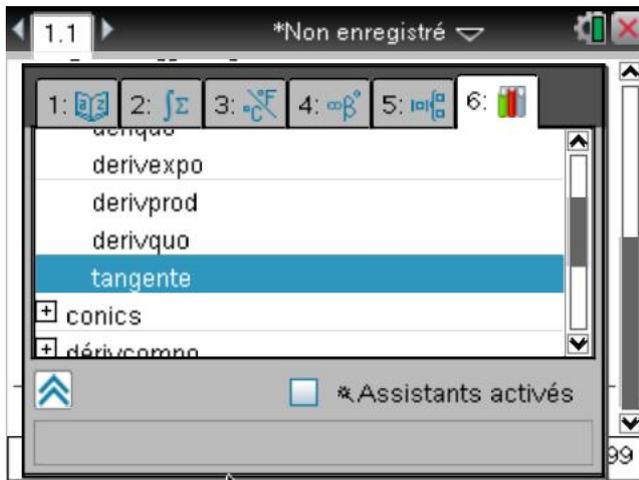
Réciter « $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ » ou « y de la forme $y = ax + b$ avec... (voir image calculatrice !).

Faire les différents calculs (qui sont donnés par la calculatrice avec le programme « tangente »).

Nous avons $f'(6) = -15$ et $f(6) = 24$. D'où $y = -15(x - 6) + 24$ soit finalement $y = -15x + 114$. CQFD et même pas dur.

C'est faisable SANS calculatrice, pourtant, un petit programme sympa ça s'utilise toujours !

Ouvrir le catalogue. Vous devriez être sur l'onglet 6. Dans « aderiv » aller sur « tangente ». Valider, puis entrer les instructions (images).



14. Faire un tableau de valeurs (quelques unes), puis tracer C_f la courbe représentative de f dans un bon repère ainsi que la tangente (et les asymptotes).

Ca, je vous laisse faire, c'est le plus facile. Attention, il faut $Y_{max} = 50$ pour voir la partie de la courbe en haut à droite.

2. Exo corrigé avec une calculatrice TI-Nspire (lui aussi posé en contrôle STL) :

I. Étude de fonction 11 points : Soit sur $I =]-1; +\infty[$ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes éventuelles.

2. Montrer que sur I f peut s'écrire $f(x) = ax + \frac{b}{x + 1}$ où a et b sont deux réels à déterminer

remarques :

* développer (mettre même dénominateur) $ax + \frac{b}{x+1}$ pour retrouver (égaler) $f(x)$,

* on peut déduire de cette question que $y=x$ est asymptote oblique à C_f .

3. Montrer que $f'(x)$ dérivée de $f(x)$ sur I s'écrit $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$. Déterminer son signe sur I et le tableau de variations de f .
4. Équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe représentative de la fonction, en $x_0=2$ (on pourra trouver $y = \frac{5}{9}x + \frac{20}{9}$ si je ne me suis pas trompé !).
5. Dans un repère tracer C_f et sa tangente \mathcal{T} en x_0 (et son asymptote en $+\infty$ si l'on veut).

CORRECTION (succincte) avec utilisation de la TI-NSpire CAS.

I. Étude de fonction 11 points : Soit sur $I =]-1 ; +\infty[$ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

6. Limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes éventuelles.

7. Montrer que sur I f peut s'écrire

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont}$$

deux réels à déterminer

remarques :

* développer (mettre même

dénominateur) $ax + \frac{b}{x+1}$ pour

retrouver (égaler) $f(x)$,

* on peut déduire de cette question que $y=x$ est asymptote oblique à C_f .

$f(x) := \frac{x^2+x+4}{x+1}$	Terminé
$\lim_{x \rightarrow -1^-} (f(x))$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$	∞
$\text{deriv}(\text{deriv}(\frac{x^2+x+4}{x+1}))$	
	Dérivée d'un quotient $(u/v) = (u'v - uv')/v^2$ $u'v$ puis $-uv'$ puis v^2 $[2 \cdot x + 1][x + 1]$ $[-(x^2 + x + 4)]$ $[\quad] [(x+1)^2]$ $f'(x) = \frac{x^2 + 2 \cdot x - 3}{(x+1)^2}$
	Terminé
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{x^2+2 \cdot x-3}{(x+1)^2}$

On peut utiliser mon programme de calcul de la dérivée d'un quotient (il devrait donner tout ce dont vous avez besoin), ainsi que le programme TANGENTE !

Comme vous le savez, les limites, la dérivée à la calculatrice sont des INDICATIONS. VOUS DEVEZ écrire certaines choses...que VOUS CONNAISSEZ PAR CŒUR !

8. Montrer que $f'(x)$ dérivée de $f(x)$ sur I s'écrit

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}. \text{ Déterminer}$$

son signe sur I et le tableau de variations de f .

Voir écran précédent

9. Équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe représentative de la fonction, en $x_0=2$ (on pourra trouver $y = \frac{5}{9}x + \frac{20}{9}$ si je ne me suis pas trompé !).

<code>propFrac(f1(x),x)</code>	$\frac{4}{x+1} + x$
<code>tangente\tangente(f1(x),2)</code>	Tangente en x_0 a la courbe "représentative de $(x^2+x+4)/(x+1)$ " " en $x_0=2$ " $y=ax+b$ avec $a=f'(x_0)$ et $b=f(x_0)-x_0*f'(x_0)$ "a=5/9" "b=20/9"
<i>Terminé</i>	

Tableau de variations (utiliser TABVAR). Un tableau de valeurs pour avoir une idée de la fenêtre de la courbe.

x	-1	1	∞
f'	-	0	+
f	∞	\searrow	\nearrow

x	f1(x):= $\frac{x^2+x+4}{x+1}$
-1.	(...)
0.	4.
1.	3.
2.	3.33333
3.	4.
4.	4.8

10. Dans un repère tracer C_f et sa tangente \mathcal{T} en x_0 (et son asymptote en $+\infty$ si l'on veut).

