# *Fonctions : étude* (Limites…) *partie 2*

On cherche des limites quand la fonction pose problème (elle n'est pas définie en un point parce que dénominateur par exemple), ou pour avoir une idée de ce qu'elle devient en dehors du cadre de la feuille de traçage (du côté de $\pm\infty$ ).
Deux types de limites qui donnent deux façons de répondre à la question :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ où a est un nombre « problématique » (dénominateur s'annule, fonction logarithme pas définie, etc.).

On doit s'attendre à trouver $\pm\infty$ . « S'attendre » n'est pas une obligation, il y a évidemment des cas où c'est différent, cela concerne certaines classes (et pas d'autres !).
Le mode d'emploi est rituel (!) ou presque (petites nuances avec les fonctions spécifiques à la classe de terminale comme *ln*). Ecrire ce que l'on cherche (respecter la façon d'écrire !), le résultat et un peu plus loin la justification.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ est un problème fréquent. On veut connaître ce qui se passe là ou on ne peut pas regarder…

Comme précédemment, le mode d'emploi est rituel (!) ou presque (petites nuances avec les fonctions spécifiques à la classe de terminale comme *ln* et/ou $e^x$) [c'est la même phrase, pourtant le traitement n'est pas identique !].
Le principe est de mettre en facteur « le plus grand infini » (hé oui, l'infini n'est pas pareil à tous les coups).
En classe de terminale il faut ajouter les limites particulières des fonctions *ln* et $e^x$ qui sont à connaître par cœur.

**Remarque :** la calculatrice est une aide (pas une preuve). Entrée de la définition de la fonction, chercher le résultat obtenu pour une valeur proche de la valeur particulière étudiée comme $\pm 0,01$ par exemple pour 0 ou $\pm 100$, $\pm 1000$... du côté de $\pm\infty$ . Le tracé de la courbe (représentative de la fonction) est aussi une bonne indication.

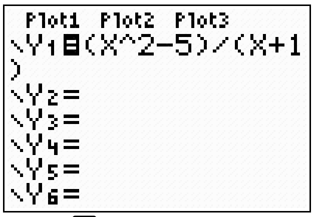
## I. Limites en $\pm\infty$ : (petite remarque, il n'est pas donné le domaine de définition que vous avez le droit de chercher !).

**1.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x+1}$ (Il faudra aussi regarder du côté de -1 !).

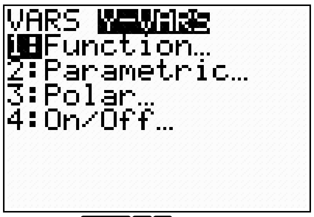
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$$

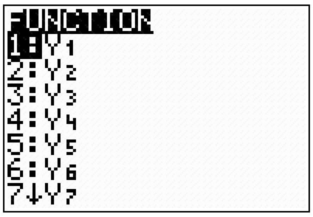
**Que dit la calculatrice ?**

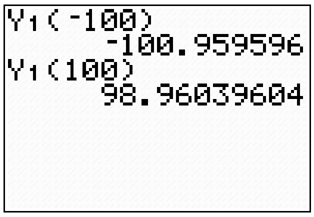



Touche [Y=].




Touches [VARS][▸][1].




Résultats « grands » donc !

: une fois entré la définition de la fonction dans l'écran [Y=], il faut obligatoirement sortir par [2nd][MODE] pour [QUIT].

**2.** $f(x) = \dfrac{7x - x^2}{x^2 + 1}$

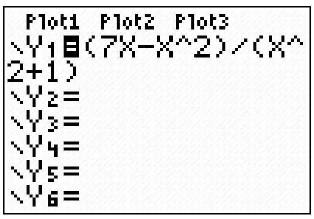
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{7}{x} - 1\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} -1 = -1$$

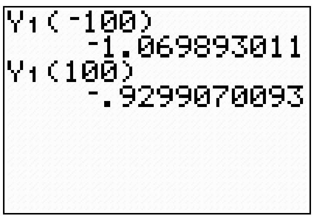
Rem : Asymptote horizontale $y$=-1.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{7}{x} - 1\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} -1 = -1$$

Rem : Asymptote horizontale $y$=-1.

**Que dit la calculatrice ?**



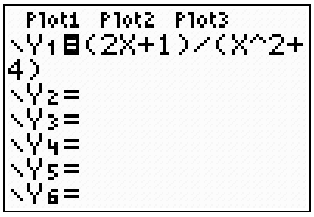



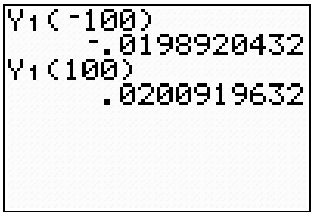

Le résultat dans les deux cas est proche de -1. Ce doit être la limite.
Si ce calcul est effectué **avant** la recherche de la limite c'est une indication, si c'est **après** la recherche c'est une confirmation !

**3.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+4}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ Rem : Asymptote horizontale $y$=0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ Rem : Asymptote horizontale $y$=0.

**Que dit la calculatrice ?**




Le résultat dans les deux cas est proche de 0. Ce doit être la limite.
On remarque le signe qui donne l'indication
« la courbe sera en dessous de l'axe en -∞ ».
« la courbe sera au dessus de l'axe en +∞ »

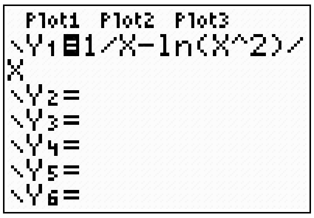
**Et plus spécifiques à la terminale :**

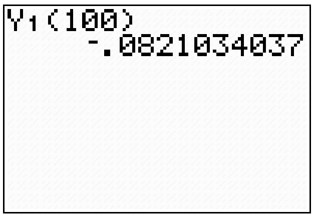
**4.** $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x^2}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x^2}{x}\right)$ il n'y a pas la réponse… car il faut maintenant justifier :

- ✓ Le cours dit « pour a>0, $\ln a^n = n\ln a$ » donc $\ln x^2 = 2\ln x$
- ✓ Le cours dit « $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=0$ » alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x^2)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=0$

Réponse : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ Asymptote horiz $y$=0.

**Que dit la calculatrice ?**




Le résultat est proche de 0. Ce doit être la limite.
Même remarque que précédemment (courbe en dessous de l'axe, son asymptote).

**5.** $f(x)=2\ln(x-1)-\ln(5+x)$ Comment faire ?

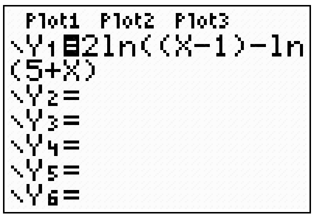
- ✓ Le cours dit « pour a>0 et b>0, $\ln a-\ln b=\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ »
- ✓ « pour a>0, $\ln a^n = n\ln a$ » donc $2\ln(x-1)=\ln(x-1)^2$

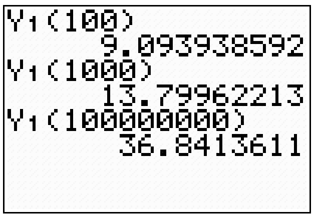
Alors $f(x)=\ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+5}\right)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+5}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=+\infty$

(Il faut réfléchir un peu, j'ai VOLONTAIREMENT supprimé quelques étapes).

Réponse : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

**Que dit la calculatrice ?**



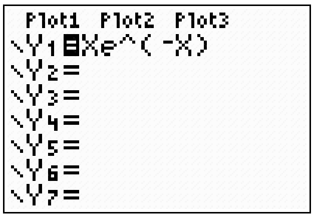



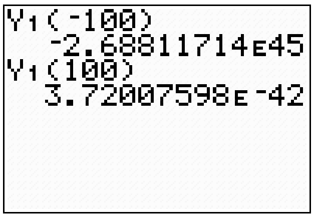

Petit problème, la croissance est lente. Normal c'est un logarithme. On peut essayer de se convaincre en ajoutant encore quelques zéros. La remarque nécessaire c'est que ça augmente et devrait donc aller de plus en plus du côté de +∞.

**6.** $f(x)=xe^{-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$ CAR (cours) $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ (encore une fois, le résultat n'est pas une application directe, ILS compliquent exprès !).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ CAR (cours) $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$. Asym horiz $y$=0.

**Que dit la calculatrice ?**



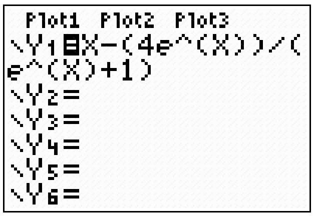



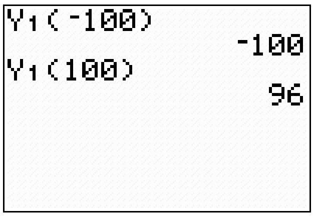

Bien remarquer les PUISSANCES aux résultats !
Pour le premier c'est négatif et grande puissance (positive) donc +∞.
Le second c'est positif et grande puissance (négative) donc 0 (réfléchir n'est pas interdit !).

**7.** $f(x)=x-\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-0=-\infty$ CAR (cours) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-4=+\infty$ CAR (cours) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}(4)}{e^{x}\left(1+{}^{1}\!/_{e^{x}}\right)}=4$.

**Que dit la calculatrice ?**




Résultats conformes aux trouvailles.

## II. Limites en *a* (un nombre) : (on peut aussi regarder ce que ça donne en ±∞)

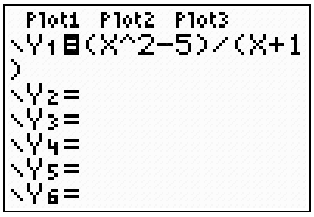
**1.** $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+1}$ (en $x$= -1). $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$ CAR $\begin{cases}N\to-4\\D\to0^-\end{cases}$ A. Verticale $x$=-1.

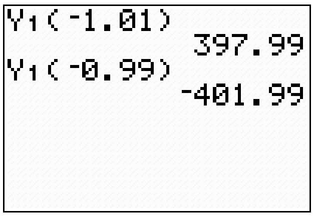
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ CAR $\begin{cases}N\to-4\\D\to0^+\end{cases}$ A. Verticale $x$=-1.

**Rem :** pourquoi $0^-$ ou $0^+$ ?

- Ici c'est de la forme $ax+b$ donc « du signe placé devant le $x$ après la valeur qui annule ».
- Si c'est du second degré : $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines ».
- Sinon (c'est autre chose parfois en terminale), il faut dire « c'est une fonction croissante (ou décroissante) donc positive (ou négative) après la valeur qui annule ».

**Que dit la calculatrice ?**



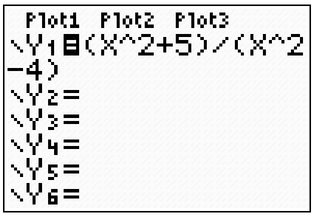

Résultats conformes aux résultats théoriques.

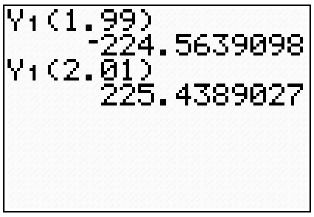
**2.** $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ (en $x$= 2). $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$ CAR $\begin{cases}N\to9\\D\to0^-\end{cases}$ A. Verticale $x$=2.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$ CAR $\begin{cases}N\to9\\D\to0^+\end{cases}$ A. Verticale $x$=2.

**Rem :** le déno est du deuxième… s'annule pour $x$=-2 ou $x$=2 donc…

**Que dit la calculatrice ?**






Je ne suis pas surpris par les résultats !

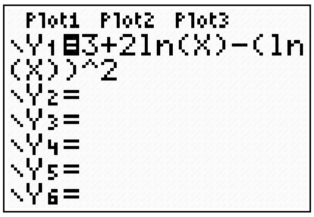
**Et plus spécifiques à la terminale :**

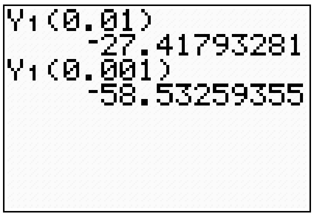
**3.** $f(x)=3+2\ln x-\left(\ln x\right)^2$ (en $x$=0). $\quad \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\ f(x)=-\infty \quad$ CAR $\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\ln(x)=-\infty$ et $\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}-\left(\ln(x)\right)^2=-\infty$

A. Verticale $x$=0.

**Rem :** c'était pas trop méchant car les deux *ln* sont de même signe. S'ils avaient mis $f(x)=3+2\ln x+\left(\ln x\right)^2$ il fallait mettre $\left(\ln x\right)^2$ en facteur, la limite devenant +∞ (vérif autorisée avec calc).

**Que dit la calculatrice ?**





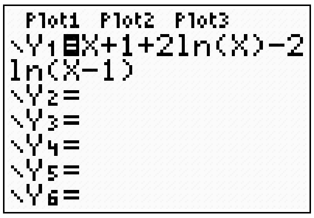

Ca s'en va du côté de -∞, pas très vite, mais ça y va.

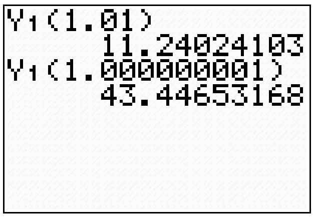
**4.** $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ (en $x$=1). $\quad \underset{\substack{x\to 1\\ x>1}}{Lim}\ f(x)=+\infty \quad$ CAR $\underset{\substack{x\to 1\\ x>1}}{Lim}\ln(x-1)=-\infty$

A. Verticale $x$=1.

**Rem :** *ln*(1)=0.

**Que dit la calculatrice ?**



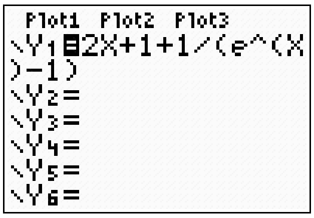


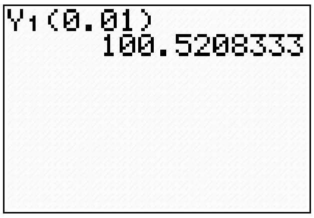

Ca s'en va du côté de +∞, pas très vite car c'est du *ln*, mais ça y va.

**5.** $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{e^x-1}$ (en $x$=0). $\quad \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\ f(x)=+\infty \quad$ CAR $\begin{cases} N\to 1\\ D\to 0^+\end{cases}$ A. Verticale $x$=0.

**Rem :** 2$x$+1 n'embête personne ! $e^x-1\to 0^+$ car $e^x$-1 est une fonction croissante, donc positive après la valeur qui l'annule.

**Que dit la calculatrice ?**






Pas de blème, ça y va tout droit.