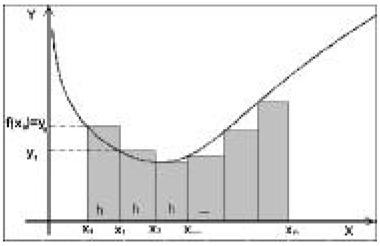
# Le DEFI : méthodes d'Euler et autres.

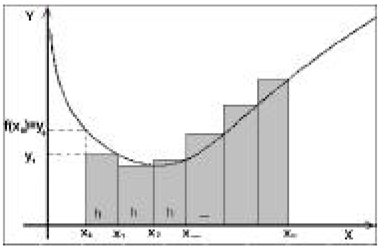
S'il n'est pas utile de TOUT écrire, il est nécessaire de donner pour chaque question les formules utilisées ainsi que la relation de récurrence liant $y_0$ et $y_1$.

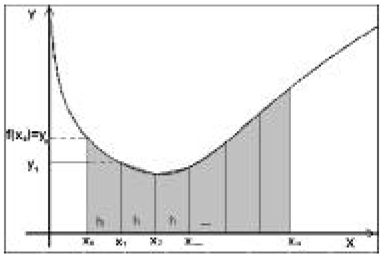
**Notations, rappels et compléments :** $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = v$ ; $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \dot{v}$ ; $si\quad v = f(t)\quad alors\quad \ddot{x} = \dot{f}(t).$

On notera $M_n(t_n; y_n)$ le $(n+1)^{\text{ième}}$ point calculé par la méthode d'approximation demandée.

Autres méthodes d'approximation : $f$ étant donnée sur un certain intervalle, l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ avec $y(a) = b$ est équivalente à $y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))dt$. Nous pouvons donc utiliser les différentes méthodes de calculs approchés d'intégrales (ou d'aires).

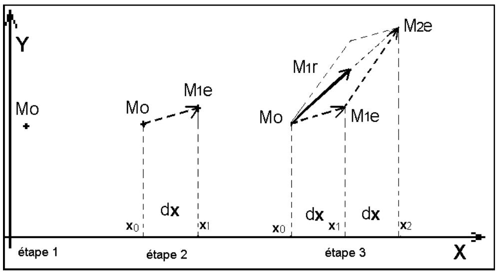






- rectangles à gauche : on prend $h \times f(x_i)$ [c'est la méthode d'Euler !]
- rectangles à droite : on prend $h \times f(x_i + h)$
- trapèzes : on fait la moyenne des deux précédents !

- point médian (sans image) : on prend $h \times f(x_i + \dfrac{h}{2})$
- Runge-Kutta d'ordre 2 (ou 3 ou 4…) En trois temps : (sur une seule image)




- Le point $M_0$ est donné.
- Construction (par Euler) de $M_{1e}$. (il est sur la tangente issue de $M_0$).
- Depuis $M_{1e}$ construction de $M_{2e}$ (par Euler). ALORS, $M_{1r}$ le point recherché est obtenu comme somme des vecteurs $\overline{M_0M_{1e}}\ et\ \overline{M_{1e}M_{2e}}$.

Remarque : $y_{1r} = \dfrac{y_{0e} + y_{2e}}{2} = y_{1r} = y_0 + \dfrac{1}{2}h\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$ lorsque $f$ (c'est $y$') est donnée.

Remarque : l'intervalle de définition des équations recherchées n'est pas forcément donné, les calculs d'approximation se faisant sur une zone où des problèmes de définition ne se posent pas (sauf peut être volontairement pour l'un des exercices).

**Exercice 1 :** un corps de masse m est soumis à certaines conditions… L'application des lois de Newton permet d'écrire $m\ddot{x} = m\dot{v} = -9{,}81\ m\ \ avec\ \ v_0 = 7{,}85$, dont il résulte l'équation différentielle $\dot{x} = 7{,}85 - 9{,}81\ t$ que l'on peut écrire sous la forme des équations différentielles vues en première : $y' = -9{,}81\ t + 7{,}85$ avec $y_0$=0 pour $t_0$=0 (que l'on sait résoudre facilement, ce qui n'est pas l'objet du problème !). Appliquer la méthode d'Euler à cette équation différentielle pour obtenir l'approximation de $M_5(t_5; y_5)$ sixième point recherché au pas $h$=0,4.

**Exercice 2 :** l'étude d'un phénomène physique conduit à écrire $\dfrac{dq}{dt} = -kq$ où $k$ est une constante liée à l'expérience. Equation différentielle réécrite sous la forme $y' = -k \times y$ avec $k$=0,0202 et $y_0$=10 pour $t_0$=0. Appliquer la méthode d'Euler à cette équation différentielle pour obtenir l'approximation de $M_{10}(t_{10}; y_{10})$ onzième point recherché au pas $h$=1.

**Exercice 3 :** recherche d'une approximation de $p$. L'aire d'un disque de rayon 1 est $A = p R^2 = p$. En utilisant la méthode d'approximation de votre choix pour le calcul de l'aire (ou de la moitié ou du quart !) d'un disque de rayon 1, avec un pas de 1/100, donner la valeur approchée de $p$ déduite (on peut utiliser, entre autre, un programme ou un calcul de la somme des termes d'une expression).

**Exercice 3 bis :** Eratosthène avait estimé (application du théorème de Thalès) le rayon de la terre à environ 6500 km. Par un découpage (judicieux) en tranches de la sphère, calculer (approximation) le volume (en litres) de la terre obtenu avec un pas de 6,5 km.

**Exercice 4 :**

**Question 1 :** Ludolph van Ceulen passa sa vie à calculer une approximation de $p$ . Combien de décimales en a-t-il déterminé ?

**Question 2 :** avec combien de chiffres s'écrit le nombre de côtés du polygone régulier lui ayant permis cette approximation ?

**Exercice 5 :** soit à résoudre, par la méthode d'Euler l'équation différentielle $\begin{cases} y''(t) = -y(t) \\ y(0) = 0 \;\; et \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$ .

**Question 1 :** pour un pas $h$=0,63 calculer les coordonnées des points $M_0(t_0; y_0)$ , $M_1(t_1; y_1)$ ,… $M_{11}(t_{11}; y_{11})$ . On ne fera figurer sur la copie que les formules de récurrence utilisées, les coordonnées des premier et dernier points.

**Question 2 :** dans un repère approprié (on pourrait choisir $0 \le t \le 7 \;\; et \;\; -5 \le y \le 5$ par exemple !), placer (travaillez rapidement… ce sont des approximations) les points trouvés et tracer l'enveloppe (la courbe) qui les joints.

**Question 3 :** déterminer (si possible) une solution de l'équation différentielle proposée. Indiquer la méthode utilisée.

**Exercice 6 :** par la méthode d'Euler on désire résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-2}{t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ ici, $t_0$=1 pour $y_0$=1.

Calculer les coordonnées des points $M_0(t_0; y_0)$ , $M_1(t_1; y_1)$ ,… $M_5(t_5; y_5)$ au pas $h$=0,25. La valeur trouvée en $y_5$ est-elle « raisonnable » ? [Expliquer, justifier].

**Exercice 7 :** soit à résoudre, par la méthode d'Euler l'équation différentielle $F'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \dfrac{2}{3}\left[(x-1)^2\right]^{-\frac{1}{3}}$ avec $y_0 = F(x_0) = 1$ où $x_0$=0. Au pas $h$=0,5 calculer la valeur de $y_3$ . Que penser du résultat [Expliquer, justifier].

**Exercice 8 :** soit à résoudre, par la méthode de Runge-Kutta l'équation différentielle $\begin{cases} y''(t) = -y(t) \\ y(0) = 0 \;\; et \;\; y'(0) = 1 \end{cases}$ .

Au pas $h$=0,63 calculer la valeur de $y_5$ . Ecrire les formules de récurrence utilisées.

**Remarque : le jury est souverain dans ses décisions.**