# Le DEFI : méthodes d'Euler et autres, **CORRECTION**

Si le trait principal était de mettre en œuvre l'un des aspects nouveaux des programmes, les idées en étaient :

- La méthode d'Euler c'est l'occasion de dire que les équations différentielles n'ont que rarement une solution analytique. Souvent il faut en passer par une recherche algorithmique de solutions approchées.
- C'est une bonne occasion de programmer (y compris un peu plus simplement par le tableur sur calculatrice qui s'occupe pour nous de l'itération). Tout se résume pratiquement qu'au seul algorithme qu'est la méthode d'Euler.
- Cela peut déboucher sur une recherche interessante pour les élèves (approximation d'aires par différents algorithmes donc programmes).

Les notations du défi sont celles du programme officiel. A aucun moment (sauf exo 5 question 3 pas méchament) il n'est nécessaire de connaître la résolution des équations différentielles proposées, ni les fonctions logarithme ou exponentielle ! Il suffit d'appliquer l'algorithme de la méthode d'Euler. Les valeurs n'étant que des approximations, toute réponse « proche » est accéptée.

**Exo 1 :** $y' = -9{,}81\,t + 7{,}85$ avec $y_0$=0 pour $t_0$=0. De la forme $\begin{cases} f(t, y(t)) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ décrite par le programme officiel pour la classe de première. Dans ce cas, la méthode d'Euler s'applique selon l'algorithme $y_1 = y_0 + h \times f(t_0)$ où $h$ est le pas choisi.

F1 File | F2 Plot | F3 Edit | F4 | F5 $ | F6 Funcs | F7 Stat | F8 ReCalc

| ex1 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | i | xi | yi | pas | | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | .4 | | |
| 3 | 1 | .4 | 3.14 | | | |
| 4 | 2 | .8 | 4.7104 | | | |
| 5 | 3 | 1.2 | 4.7112 | | | |
| 6 | 4 | 1.6 | 3.1424 | | | |
| 7 | 5 | 2. | .004 | | | |

C7: =C6+d$2*(⁻9.81*B6+7.85)

A_CORR DEG AUTO DE

J'utilise mon petit tableur, c'est rapidement fait. Un programme, ou quelques calculs à la main suffisent.
En bas d'écran, affichage de la formule de récurrence.

Réponse attendue :

- $y_1 = y_0 + h\ (-9{,}81\ x_0 + 7{,}85)$
- $y_5 = 0{,}004$ .

**Exo 2 :** $y' = -k \times y$ avec $k$=0,0202 et $y_0$=10 pour $t_0$=0. De la forme $\begin{cases} f(t, y(t)) = ay + b \quad a,b\ réels \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ décrite par le programme officiel pour la classe de terminale. [**je répète**… il n'est pas nécessaire de connaître la fonction exponentielle ni de savoir résoudre cette équation différentielle !]. Dans ce cas, la méthode d'Euler s'applique selon l'algorithme $y_1 = y_0 + h \times y'_0$ où $h$ est le pas choisi.

F1 File | F2 Plot | F3 Edit | F4 | F5 $ | F6 Funcs | F7 Stat | F8 ReCalc

| ex2 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 4 | 9.2162 | | | |
| 7 | 5 | 5 | 9.03 | | | |
| 8 | 6 | 6 | 8.8476 | | | |
| 9 | 7 | 7 | 8.6689 | | | |
| 10 | 8 | 8 | 8.4938 | | | |
| 11 | 9 | 9 | 8.3222 | | | |
| 12 | 10 | 10 | 8.1541 | | | |

C12: =C11+d$2*⁻.0202*C11

A_CORR DEG AUTO DE

Avec le tableur (c'est plus rapide avec un programme [SIMPLE ET BIEN FAIT…]).

Réponse attendue :

- $y_1 = y_0 + h\ y'_0$
- $y_{10} = 8{,}15$ .

Remarque : il était possible de se référer à la conférence qui présentait l'exponentielle comme issue de suites géométriques (vu sur des copies d'Ajaccio). $y_1 = y_0 + h \times y'_0 = y_0 - 0{,}0202 y_0 = y_0 (0{,}9798)$ d'où simplement $y_{10} = 0{,}9798^{10} \times 10 = 8{,}15407...$

**Exo 3 :** problème issu de la conférence.

Conseillé : un petit programme, ou comme vu pendant la conférence (quelques élèves l'ont fait !) utiliser la fonction Somme de la calculatrice. ATTENTION… ne pas oublier que l'on travaille sur le demi disque ET sur sa moitié (le rayon est calculé par Pythagore dans le quart de cercle). DONC multiplier par 4.

```
Prgm
0»a1:0»a2:.01»h
For n,0,99
```

```
2*∑ (2*h*§(1-n^2*h^2),n,0,99)
```

```
a1+2*h*§(1-n^2*h^2)»a1
EndFor
For n,1,100
a2+2*h*§(1-n^2*h^2)»a2
EndFor
Disp 2*a1,2*a2
EndPrgm
```

```
2*∑ (2*h*§(1-n^2*h^2),n,1,100)
```

J'ai mis deux boucles, suivant si le calcul se fait par une approximation supérieure (0 à 99 donne des rectangles extérieurs au disque), ou inférieure (1 à 100 donne des rectangles intérieurs au disque). Résultats donnés par les deux méthodes (pas de pb pour les décimales…) **3,1604 et 3,1204**. Remarque : quelques élèves reprennent la méthode des polygones d'Archimède (conférence), qui ne contrôle aucun pas, mais c'est joli.

**Exo 3 bis :** C'est le même principe appliqué à la sphère. Je fais le calcul en $m^3$ puis je multiplie par le coefficient qu'il faut. Programme (deux boucles comme précédement) ou fonction Somme.

```
Prgm
ClrIO
0»v1:0»v2:6.5»h
For n,0,999
v1+Œ*h*(6500^2-n^2*h^2)»v1
EndFor
For n,1,1000
v2+Œ*h*(6500^2-n^2*h^2)»v2
EndFor
Disp 2*v1,2*v2
EndPrgm
```

```
2*∑ (Œ*h*(6500^2-n^2*h^2),n,0,999)

2*∑ (Œ*h*(6500^2-n^2*h^2),n,1,1000)
```

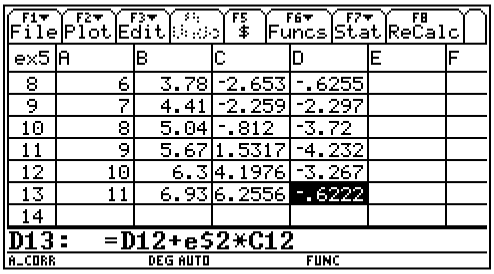
**Réponse :** $1{,}15121 \times 10^{21}$ *et* $1{,}14948 \times 10^{21}$ litres.

**Exo 4 :** totalement issu de la conférence. Ce point en a visiblement frappé quelques uns qui ont bien répondu. Remarque : certains se souviennent de $2^{62}$ côtés. Ce qui n'était pas la question posée…

**Réponse :** Question 1 : 35 décimales  Question 2 : 19 chifffres.

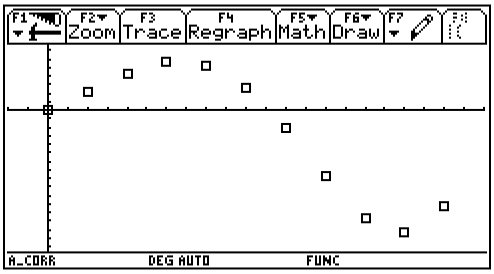
**Exo 5 :** C'est plus dur… mais il suffit (!) de travailler sur deux colonnes.

Une fois de plus j'utilise mon petit tableur (ici programmer demande un peu d'attention, et surtout de savoir le faire 'sur place' alors qu'il était autorisé d'avoir déjà un programme pour toutes les autres questions.



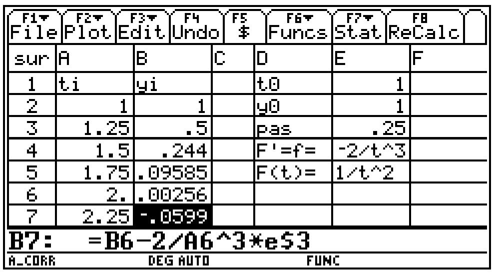
| ex5 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 3.78 | -2.653 | -.6255 | | |
| 9 | 7 | 4.41 | -2.259 | -2.297 | | |
| 10 | 8 | 5.04 | -.812 | -3.72 | | |
| 11 | 9 | 5.67 | 1.5317 | -4.232 | | |
| 12 | 10 | 6.3 | 4.1976 | -3.267 | | |
| 13 | 11 | 6.93 | 6.2556 | -.6222 | | |
| 14 | | | | | | |

D13: =D12+e$2*C12



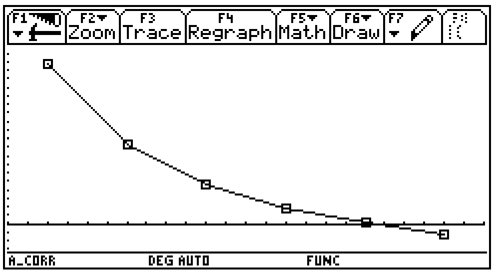

La formule est identique (au signe près) pour les deux colonnes.
Question 3 : Une élève dit « la fonction sinus marche ».

**Exo 6 :** Ce n'est pas simple… Appliquer Euler n'est pas un problème. Ils n'ont pas les reflexes que l'on peut espérer quand ils seront en fin d'année. Nous sommes sur une « exeption » de la méthode d'Euler. Tracer la courbe intégrale (approximation par Euler) ça aide. Remarque : la fonction primitive n'était pas donnée.



| sur | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ti | yi | | t0 | 1 | |
| 2 | 1 | 1 | | y0 | 1 | |
| 3 | 1.25 | .5 | | pas | .25 | |
| 4 | 1.5 | .244 | | F'=f= | -2/t^3 | |
| 5 | 1.75 | .09585 | | F(t)= | 1/t^2 | |
| 6 | 2. | .00256 | | | | |
| 7 | 2.25 | -.0599 | | | | |

B7: =B6-2/A6^3*e$3

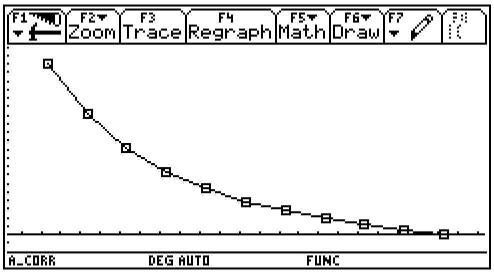


La question à se poser : « est-ce que ça doit basculer en négatif ? ». Un pas plus petit montre que ce n'est pas le cas SUR LE MEME INTERVALLE.

| ex6 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1.6 | .26779 | | | | |
| 7 | 1.75 | .19455 | | | | |
| 8 | 1.9 | .13857 | | | | |
| 9 | 2.05 | .09483 | | | | |
| 10 | 2.2 | .06001 | | | | |
| 11 | 2.35 | .03184 | | | | |
| 12 | 2.5 | .00872 | | | | |

B12: =B11-2/A11^3*e$3

A_CORR DEG AUTO FUNC




Pour un pas de 0,15 nous ne sommes pas encore en négatif. Remarque : plusieurs élèves ont écrit la formule de dérivation des fonctions puissance et indiqué qu'une « primitive » serait connue, toujours positive.

**Exo 7 :** encore une exeption.

| x3_ | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | xi | yi | | x0 | 0 | | |
| 2 | 0 | 1 | | y0 | 1 | | |
| 3 | .5 | 2. | | Pas h | .5 | | |
| 4 | 1. | 3.5874 | | F'=f= | 2/(3(x-1)^(2/3)) | | |
| 5 | 1.5 | undef | | F(x)= | 2(x-1)^(1/3)+3 | | |
| 6 | 2. | undef | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

B5: =B4+2/(A4-1)^(2/3)*e$3

A_CORR DEG AUTO FUNC

La fonction donnée ne respecte pas les conditions d'application de la méthode d'Euler (fonction dérivée non définie en un point de l'intervalle étudié).

**Exo 8 :** tableur ou programme largement conseillé. C'est appliquer Euler deux fois pour revenir en arrière… Donné uniquement pour être sur que les élèves en auraient pour un temps total de travail suffisant !

| eul | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ti | y'(ti) | y(ti) | | Pas h | sin(x) |
| 2 | 0 | 1 | 0 | | .063 | 0 |
| 3 | .063 | 1. | .063 | | | .06296 |
| 4 | .126 | .99603 | .12587 | | | .12567 |
| 5 | .189 | .9881 | .18838 | | | .18788 |
| 6 | .252 | .97623 | .25025 | | | .24934 |
| 7 | .315 | .96047 | .31126 | | | .30982 |

C7: =C6+e$2*B6-1/2*e$2^2*C6

A_CORR DEG AUTO FUNC

Vous avez ce qu'il faut ci-contre.
La formule de y' est calculée selon Euler, j'aurais pu jouer pour elle aussi du Runge-Kutta.

Remarque : les élèves déclarés vainqueurs tant à Ajaccio qu'à Bastia ont traité les exercices 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; et 7. UN élève n'a traité QUE l'exercice 8, qui plus est correctement. Pourquoi pas le reste ? Ils sont quelques uns à faire l'exercice 3 (dont les deux second et troisième d'Ajaccio). Le tiers environ des copies contient l'exercice 6 où un problème de définition est indiqué. Du coup, deux élèves commencent l'exercice 7 en disant que la fonction est définie…