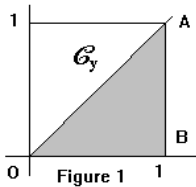


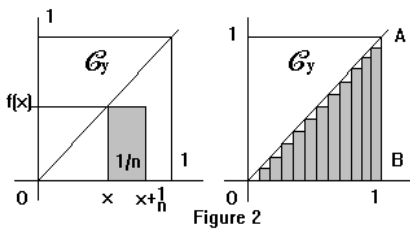
Programmation : aires



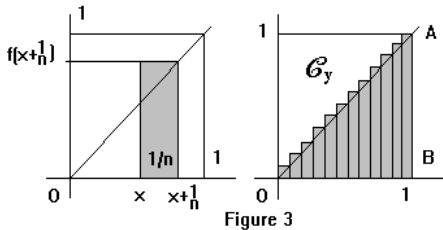
Le but du problème est d'encadrer A, l'aire comprise entre C_y courbe représentative d'une fonction $y=f(x)$, l'axe $[0x]$, les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$. C'est l'aire en grisé de la figure 1 ci-contre avec ici $f(x) = x$, $a=0$, $b=1$.

Méthode des rectangles :

Une approximation peut être obtenue en découpant l'aire en rectangles de largeur $1/n$ (le 'pas' choisi), et de hauteur $y = f(x)$, cas de la figure 2. On appelle A_1 cette aire. On prendra $n=100$ ou $n=1000$.



On peut aussi calculer l'aire des n rectangles de largeur $1/n$ et de hauteur $y = f(x+1/n)$, cas de la figure 3. On l'appelle A_2 .



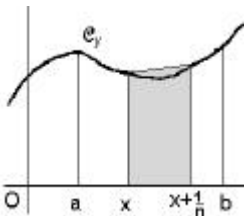
Cela permet, **dans CE cas de figure**, l'encadrement :

$$A_1 \leq \text{Aire (recherchée)} \leq A_2$$

1. Construire un programme permettant de calculer A_1 et A_2 :

Remarques :

- * la fonction sera déclarée dans `main` avec $f(x) = x$.
- * entrée des bornes a et b : on construira une procédure d'entrée des bornes au clavier, ainsi qu'une fonction « Echanger » d'échange de leurs valeurs si l'ordre n'est pas respecté.
- * le calcul de A_1 ou A_2 sera effectué par appel de fonction, dont on construira une forme itérative ainsi qu'une forme récursive.
- * dans les conditions précédentes, où $f(x) = x$, $a=0$ et $b=1$ le résultat obtenu est visiblement $1/2$, aire de la moitié du carré unité.
- * nous pouvons constater que $A_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$ et $A_2 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$.
- * que peut-on dire de la différence entre A_1 et A_2 lorsque n croît ?



Méthode des trapèzes :

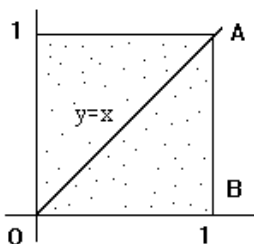
C'est construire le trapèze de largeur (hauteur) $1/n$, et de bases $f(x)$ et $f(x+1/n)$. C'est aussi la moyenne des deux aires précédentes A_1 et A_2 .

$$A_t = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

2. Construire un programme permettant de calculer A_t , toujours dans le cas où $f(x) = x$:

Remarque : dans CE cas, l'aire exacte et son approximation sont identiques.

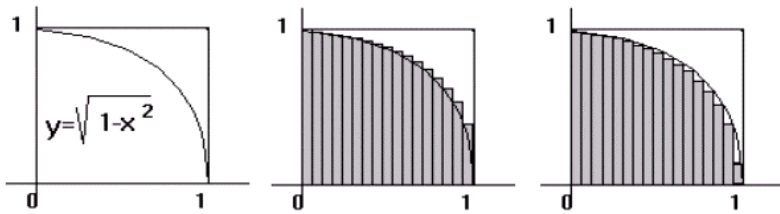
Méthode de Monte-Carlo :



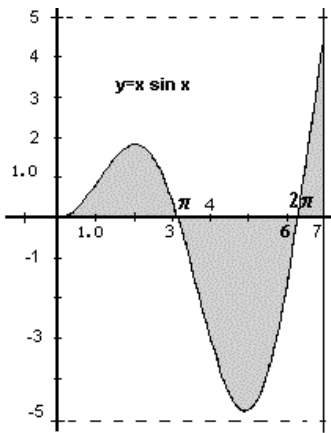
On considère le rectangle dans lequel s'inscrit le domaine de la courbe étudiée dont on veut calculer l'aire. Par exemple, pour $f(x) = x$, $a=0$, $b=1$, cas de la figure ci-contre, on prendra comme « rectangle » le carré unité. Ce rectangle est alors « bombardé » de points aléatoirement. Une approximation de l'aire recherchée est donnée par le rapport :

$$A_{MC} = \frac{\text{nombre de points ayant touché la surface}}{\text{nombre de points total}} \times \text{aire du rectangle}.$$

3. Construire un programme permettant de calculer A_{MC} , encore dans le cas où $f(x) = x$:



4. Utiliser les programmes précédents pour calculer l'aire obtenue pour la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, avec $a = 0$ et $b = 1$.



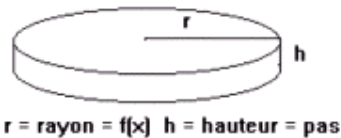
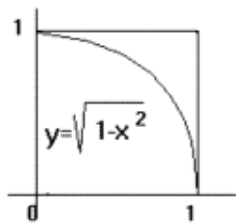
5. Utiliser les programmes précédents pour calculer l'aire obtenue pour la fonction $f(x) = x \sin(x)$, x en radians, $a = 0$ et $b = 7$.

Peut-on utiliser les calculs de A_1 et A_2 pour encadrer l'aire exacte ?

Effectuer les retouches nécessaires de vos programmes pour tenir compte du problème rencontré : une aire ne peut être que positive.

Données :

$$f(0) = 0, f(\pi) = 0, f(2\pi) = 0, \forall x \in [0 ; 7] ; -5 \leq f(x) \leq 5.$$



6. On désire appliquer la méthode des rectangles au calcul du volume d'une sphère de rayon 1. Indiquer quelle serait votre façon de procéder.

(Rappel: Volume d'un cylindre de rayon R : $V = \pi R^2 h$)

Construire les programmes nécessaires.

Quels sont les volumes obtenus ?

$V_1 =$

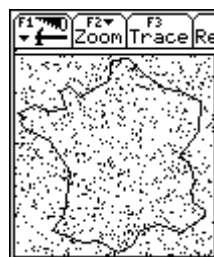
$V_2 =$

Calculer $V =$
obtenus.

et comparer avec les résultats

Autorisation accordée pour construire des programmes utilisant la méthode de Monte Carlo pour donner une approximation de l'aire de la France, ou d'une région, département... 'presque convexe'.

Voici les écrans obtenus sur ma 92 :



```

approximation: 582277. km^2
aire réelle : 551000 km^2
pourcentage erreur: 5.37
  
```

France et Corse :

Programmes récupérables sur le site
www.multimania.com/setienne



```

approximation: 8335. km^2
aire réelle : 8681 km^2
pourcentage erreur: 4.14
  
```

Jolis résultats n'est-il pas ?