

# PILE OU FACE ?

## Comparaison d'échantillons, validation d'hypothèse

Le hasard est-il bien réparti ?

Utilisation du générateur aléatoire d'une calculatrice :

```

Prgm
setFol d(status)
Dialog
  Text "Initialiser les listes"
  Request "0/N",rep
EndDialog
If rep="o" or rep="0" Then
newLi st(100) »l1: newLi st(999) »l2
newLi st(100) »l3: newLi st(100) »l4
newLi st(200) »l5: newLi st(100) »l6
newLi st(10) »aux
EndIf

0»xmi n: 0»ymi n
" ti89»160 ti92»240
getConf g() »testcal c
If testcal c[10]=160 Then
158»xmax: 76»ymax
Pxl Line 37, 0, 37, 150, 1
PtText "0. 5", 138, 42
PtText "i=", 5, 65
El se
238»xmax: 102»ymax
Pxl Line 64, 0, 64, 150, 1
Pxl Line 27, 0, 27, 150, 1
PtText "0. 5", 142, 41
PtText "1. 0", 142, 78
PtText "i=", 5, 90
EndIf

Local pair, som, nb
Define pair(nb)=Func
If 2*int(nb/2)=nb Then
Return 1: El se: Return 0
EndIf
EndFunc

0»l11: 0»l12: 0»l13: 0»l14: 0»l15: 0»l16
For i, 1, 100
rand() »a0: a0»a1
If testcal c[10]=160 Then
PtText string(i), 15, 65
El se
PtText string(i), 15, 90
EndIf
If a1<.5 Then
0»l1[i]: El se
1»l1[i]: l11+1»l11: PtOn
20, 75»l11/100
EndIf
For j, 1, 10
If i+j<110 Then
a1*10»a1
int(a1) »aux[j]
pair(aux[j]) »l2[10*(i-1)+j]
If pair(aux[j])=1 Then
l12+1»l12: PtOn 40, 75»l12/999
EndIf
fPart(a1) »a1
EndIf
EndFor
pair(sum(aux)) »l3[i]
If l3[i]=1 Then
l13+1»l13: PtOn 60, 75»l13/100
EndIf
If polyEval(left(aux, 5), 10) -
polyEval(right(aux, 5), 10)>0 Then
1»l4[i]: l14+1»l14: PtOn
80, 75»l14/100
El se: 0»l4[i]
EndIf

```

```

pair(polyEval(left(aux, 5), 10)) »l5[2*i-1]
If l5[2*i-1]=1 Then
l15+1»l15: PtOn 100, 75»l15/200
EndIf
pair(polyEval(right(aux, 5), 10)) »l5[2*i]
If l5[2*i]=1 Then
l15+1»l15: PtOn 100, 75»l15/200
EndIf
0»nb
For j, 1, 10
If pair(j)=1 Then
nb-aux[j] »nb: El se: nb+aux[j] »nb
EndIf
EndFor
If nb>0 Then
1»l6[i]: l16+1»l16: PtOn 120, 75»l16/100
El se: 0»l6[i]
EndIf
EndFor
EndPrgm

```

Avec le même nombre (entre 0 et 1) tiré du générateur aléatoire, j'obtiens 6 idées (un peu plus mais c'est pour une autre fois) permettant de comparer le résultat d'une simulation d'un pile ou face.

Idee 1 : si  $nb \geq 0,5$  alors pile sinon...

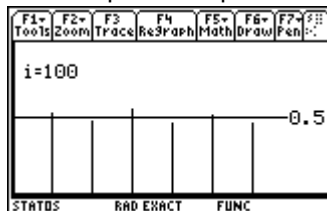
Idee 2 : pour chacun des chiffres de nb, s'il est pair pile sinon...

Idee 3 : si la somme des chiffres de nb est paire alors pile sinon...

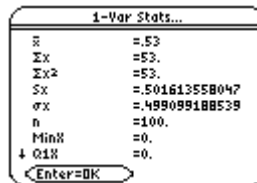
Idee 4 : si la différence entre le nombre formé par les 5 premiers chiffres de nb et les 5 suivants est positive alors pile sinon...

Idee 5 : si le nombre formé par les 5 premiers chiffres de nb est pair alors pile, de même si le nombre formé par les 5 suivants est pair alors re pile sinon...

Idee 6 : pour chaque chiffre, s'il est pair je le soustrais sinon je l'ajoute et si résultat total est pair, pile sinon...



La ligne horizontale indique 0,5 et i=100 parce que c'est fini, le nombre de boucles effectuées.



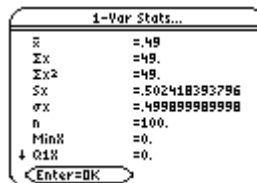
Les résultats pour I1



Les résultats pour I2



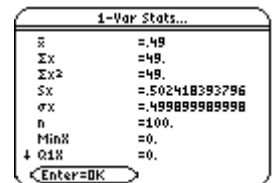
Les résultats pour I3



Les résultats pour I4



Les résultats pour I5



Les résultats pour I6

100, 200 c'est un peu 'petit' comme échantillon..., mais il faut près de six minutes pour obtenir tout ça !

Il est vrai que I2 compte tout de même 999 'tirages', pas plus car ma calculette (!) n'accepte 'QUE' ces 999 valeurs pour les traitements stats, sinon c'est 'à la main'.

(Suite 1)

Des différences tout de même, avec un seul et même nombre aléatoire. Intéressant, n'est-il pas ?

Prenons les séries I2 et I3. Deux échantillons représentatifs d'un même phénomène.

Nous avons  $\bar{x}_1 = 0,494$  ;  $n_1 = 999$  ;  $s_1 = 0,499$  et  $\bar{x}_2 = 0,57$  ;  $n_2 = 100$  ;  $s_2 = 0,495$ . Ce qui représente un écart de 0,076 sur la moyenne, i.e. 15,2 %. C'est un peu beaucoup non ? Est-ce du aux fluctuations du hasard, ou à une erreur de manipulation (mon programme ne serait-il pas parfait ?) ou un générateur de nombres aléatoires pas si aléatoire que ça ?

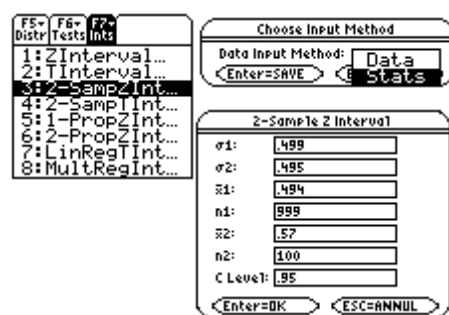
Soit  $d_x = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$  la différence des moyennes de ces deux échantillons. Alors la variance de cette variable est

$$v_{dx} = \frac{s_2^2}{n_2} + \frac{s_1^2}{n_1} \approx 0,0027 \text{ d'où } s_{dx} = \sqrt{v_{dx}} \approx 0,052. \text{ Nous supposons que la différence moyenne devrait être nulle.}$$

Au seuil de 95 % nous devrions avoir  $d = 0 \in ]0,076 - 1,96 \times 0,052; 0,076 + 1,96 \times 0,052[ = ]-0,0258; 0,1778[$  ce qui bien que surprenant est vrai. Après ce beau calcul, je n'ai aucune contrariété avec le générateur aléatoire de ma calculette. D'ailleurs, que dit ma TI 89 ou 92 à ce propos ? Application StatFlash bien sûr :

Le menu **F6** teste l'égalité (ou l'ordre) des moyennes de deux populations (écarts types connus). Le résultat est un intervalle où la propriété testée est vraie à une certaine probabilité près, (décidée par la machine).

Le menu **F7** donne un intervalle de confiance pour la différence de deux moyennes (écarts types connus), au seuil de confiance choisi.

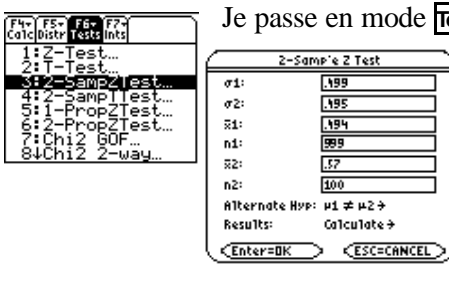


Intervalle : je passe en mode **Ints** par **F7** menu **3:2-SampZInt...**

Je choisis les entrées **Stats** qui seront mes valeurs, et non **Data** qui serait les résultats statistiques des listes de la machine !

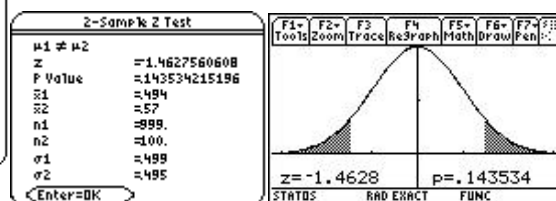
J'entre les données, d'où le résultat ci-contre.

Intervalle machine :  $] -0,178; 0,0258[$  c'est ce que j'ai trouvé 'à la main'...

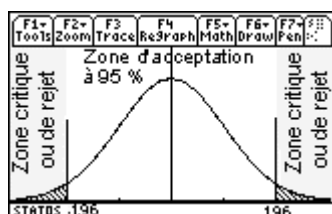


Je passe en mode **Tests** par **F6** menu **3:2-SampZTest...** (et stat)

J'entre les données, et je choisis **calculate** puis **Draw** qui offre la courbe.



Que veulent dire ces choses ?  $z$  est la variable testée (c'est son nom), le - c'est parce que j'ai pris I2 puis I3.

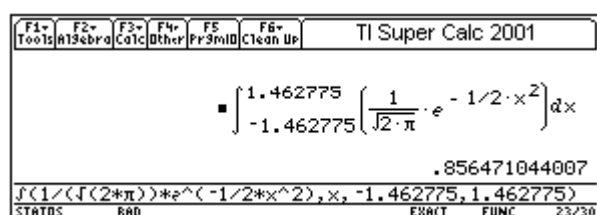


Cas général (à la main) avec 95 % et donc -1,96 ou +1,96 :

La zone en grisé, les 0,05 ou 5 % c'est la région avec  $z < -1,96$  ou  $z > 1,96$  et qui me permet de dire « je rejette l'hypothèse de l'égalité de mes deux moyennes, avec une probabilité de seulement 5 % de risque de me tromper ».

Par contre si je suis dans l'intervalle tel que  $-1,96 < z < 1,96$  j'accepte de croire que les deux moyennes sont identiques, avec 95 % de chances de ne pas me tromper.

Revenons alors à notre préoccupation précédente, à quoi sert  $z$  ? Comme  $z = -1,46...$  il est du bon côté de



l'intervalle, et donc, comme pour le calcul manuel, ça me permet de penser que le générateur aléatoire a bien travaillé. En prenant une bonne table des aires de la courbe centrée réduite, ou par l'utilisation d'une petite intégrale donnant le calcul de l'aire, offerte par l'écran ci-contre, je trouve la barrière (valeur proba) à 85,65 % environ.

Heu, justement, j'ai oublié de remarquer qu'en plus de  $z$  la calculatrice me disait  $p = 0,143534$ . D'ailleurs, certains par un petit coup de calcul mental on trouvé  $1 - 0,143534 = 0,856466$ . Etonnant non ?

Bon, J'ai dit que je ne me fâcherais pas avec le générateur aléatoire de ma calculatrice. Mais... est-ce que les calculs précédents le permettent ?

En effet, j'ai comparé deux échantillons entre eux, le calcul de l'intervalle de confiance effectué permet de décider qu'avec une erreur probablement inférieure à 5% la différence observée est normale, fait partie des fluctuations prévisibles de toute expérimentation.

Ce qui ne dit pas que le générateur a bien travaillé. Faisons un petit transfert supposons qu'en réalité ce n'est pas un tirage calculatrice, mais une vraie pièce qui ait été lancée. La question serait alors : « malgré une certaine différence avec la théorie (50 % pile 50 % face) est-ce que je peux tout de même déclarer ma pièce parfaite ? »

Je choisis la liste aux résultats qui me semblent les plus défavorables : 13. 57 piles et 43 faces en 100 tirages. Et je me répond : « pour comparer les résultats d'un échantillon avec l'attendu théorique (qui ici existe), il faut utiliser un test du khi-deux. »

$$\text{Nous avons } \chi^2 = \frac{(57 - 50)^2}{57} + \frac{(43 - 50)^2}{43} = 1,999$$

k, nombre de classes ou catégories est 2 (pile, face). Donc le degré de liberté  $n=k-1$  est 1. Dans une bonne table je trouve  $\chi^2_{0,95} = 3,84$  et  $\chi^2_{0,99} = 6,63$ .

Je peux alors conclure : comme  $\chi^2_{0,95} = 3,84 > 1,999$  je considère la pièce comme parfaite au seuil de signification de 5 % (et à plus forte raison au seuil de 1 %). D'après les calculs, j'ai moins de 5 % de risque de me tromper avec cette affirmation.

Je pousse le bouchon un peu plus loin (du côté de Daniel), pour rappeler que le hasard fait ce qu'il veut.

Ce n'est pas une petite loi tout droit sortie d'un esprit même et surtout cartésien qui change quoi que ce soit...

Ce qui veut dire que la vraie moyenne se trouve là où le générateur la place..., par contre, la moyenne de « mon » échantillon dépend de « cet » échantillon. Quand je calcule un « intervalle de confiance », à partir de cet échantillon, je dois traduire par « intervalle probable où je suppose que se trouve la vraie moyenne ». Quelle s'y trouve ou non, mes calculs ne sont que des probabilités... Et là je rappelle la fin d'une petite phrase pas loin : le hasard fait ce qu'il veut.